Departament d'Economia Aplicada

Homogeneización en un Sistema de tipo Leontief (o Leontief-Sraffa).

Xose Luis Quiñoa,
Laia Pié Dols

DOCUMENT DE TREBALL

11.04

Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat d'Economia i Empresa

Aquest document pertany al Departament d'Economia Aplicada.

Data de publicació : **Febrer 2011**

Departament d'Economia Aplicada
Edifici B
Campus de Bellaterra
08193 Bellaterra

Telèfon: (93) 581 1680
Fax:(93) 581 2292
E-mail: d.econ.aplicada@uab.es
http://www.ecap.uab.es

Homogeneización en un Sistema de tipo Leontief (o Leontief-Sraffa)

Xose Luis Quiñoa[1]* /Laia Pié[2]

Resumen

Dado un sistema tipo Leontief (o Leontief - Sraffa), se demuestra que puede ser transformado en uno *estructuralmente equivalente* que denominaremos *sistema homogeneizado* en el que la matriz tecnológica A así como la inversa de Leontief poseen propiedades matemáticas relevantes relacionadas con el autovalor máximo $\overline{a}$ de A. Las matrices $I-(1+\Pi)A$, $0 \leq \Pi < \frac{1}{\overline{a}} - 1$ son de diagonal dominante por columnas.

Para un sistema homogeneizado es condición necesaria y suficiente para que los precios relativos en el sentido Sraffa permanezcan invariantes al modificar el tipo de beneficio, que los coeficientes de trabajo directo sean iguales. Asimismo para este tipo de sistemas, la razón entre la suma de las mercancías que componen el excedente y la suma de las mercancías utilizadas como medios de producción coincide con el tipo máximo de beneficio $\tilde{\Pi} = \frac{1}{\overline{a}} - 1$, es lo que Sraffa denomino "razón patrón" (global) en su Sistema Patrón.

Palabras clave: Homogeneización, sistema de Leontief, Leontief-Sraffa, tipo de beneficio, excedente, capital, trabajo.

[1] * Corresponding authour. Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Ciencias Economicas y Empresariales, C/ Burgo das Nacións, s/n, Santiago de Compostela, Spain Tel. +34 8818 11516, joseluis.quinoa@usc.es

[2] Depatamento de Economia Aplicada, Universidad Autonoma de Barcelona, Facultad de Economia y Empresa, Edifici B- Campus de Bellaterra, 08193 Bellaterra, Spain Tel. +34 93 581 4582, Fax. +34 93 581 2292, laia.pie@uab.cat

1. INTRODUCCIÓN

En el transcurso del análisis utilizaremos las notaciones siguientes:

1) $\left(q_{ij}\right) = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & q_{ij} & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

representa la matriz de transacciones interindustriales; q_{ij} denota la cantidad física de mercancía i utilizada por la industria j en el período de tiempo considerado (por ejemplo, un año).

2) $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

es el vector columna que representa el excedente del sistema; así, β_i es el excedente de la industria i y suponemos que existe al menos una industria i para la que $\beta_i > 0$.

3) $Q_i = q_{i1} + \ldots + q_{ij} + \ldots + q_{in} + \beta_i$ denota la producción total de la industria i en el período considerado. Denotando $q_i = q_{i1} + \ldots + q_{in}$ (consumos intermedios de la industria i), tenemos, entonces,

$$Q_i = q_i + \beta_i$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

representa el vector columna de producción total del sistema.

4) $(L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n)$ denota el vector fila de las cantidades de trabajo utilizadas por cada industria; L_i representa la cantidad de unidades de trabajo utilizadas por la industria i.

Suponemos que el trabajo es uniforme en calidad o que cualquier diferencia en calidad ha sido reducida a diferencias en cantidad.

5) Como es habitual en este tipo de análisis, $A = (a_{ij})$ denota la matriz cuadrada $n\times n$, definida por $a_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{Q_j}$; a_{ij} es, pues, la cantidad física de mercancía i utilizada en la producción de una unidad de mercancía j.

6) Asimismo, $l_i = \dfrac{L_i}{Q_i}$ representa la cantidad de trabajo utilizada en la producción de una unidad de mercancía i. $l = (l_1,\ldots, l_i,\ldots, l_n)$ es el vector fila de los coeficientes de trabajo.

Para simplificar llamaremos a $\begin{bmatrix} A \\ l \end{bmatrix}$ "técnica del sistema". Por comodidad, para representar explícitamente el problema utilizaremos el tablero:

$$(*)_1: \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1j} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nj} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \overline{L_1} & \qquad & \overline{L_j} & \qquad & \overline{L_n} \end{matrix} & & \end{bmatrix}$$

2. **EL SISTEMA DE PRECIOS DE SRAFFA**

Comenzaremos utilizando las mismas hipótesis de partida del propio Sraffa, que pueden ser resumidas en:

1) El sistema económico se encuentra en estado estacionario. Produce cada año la misma cantidad de mercancías.
2) Cada industria produce una sola mercancía mediante el empleo de trabajo y mercancías. Una parte de la producción total deberá ser destinada a reemplazar las mercancías que han sido utilizadas y el resto –el excedente– se destinará al consumo.
3) El valor añadido del sistema económico o valor del excedente se distribuye al final

del período en forma de salarios y beneficios: los salarios en proporción a la cantidad física de trabajo empleada y los beneficios en proporción al valor de los medios de producción empleados por cada industria.

Cabe señalar que el propio Sraffa distingue dos aspectos en los salarios:[3]

a) Como elemento de subsistencia.
b) Como participación en la producción excedente.

2.1. FORMULACIÓN DEL SISTEMA DE PRECIOS

Denotando $p_1,\dots, p_i,\dots, p_n$ los precios de las mercancías 1, 2,…, n; Π el tipo de beneficio y w el salario unitario y con notaciones de $(*)_1$, siguiendo a Sraffa tenemos:

$$(*)_2 \qquad \begin{cases} q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \dots + q_{n1}p_n + \Pi\left(q_{11}p_1 + \dots + q_{n1}p_n\right) + L_1 w = Q_1 p_1 \\ \dots \\ q_{1j}p_1 + q_{2j}p_2 + \dots + q_{nj}p_n + \Pi\left(q_{1j}p_1 + \dots + q_{nj}p_n\right) + L_j w = Q_j p_j \\ \dots \\ q_{1n}p_1 + \dots + q_{nn}p_n + \Pi\left(q_{1n}p_1 + \dots + q_{nn}p_n\right) + L_n w = Q_n p_n \end{cases}$$

Dividiendo los dos términos de cada ecuación j por el término Q_j correspondiente y reagrupando queda:

$$(*)_3 \qquad \begin{cases} (1+\Pi)a_{11} + (1+\Pi)a_{21} + \dots + (1+\Pi)a_{n1} + l_1 w = p_1 \\ \dots \\ (1+\Pi)a_{1j} + (1+\Pi)a_{2j} + \dots + (1+\Pi)a_{nj} + l_j w = p_j \\ \dots \\ (1+\Pi)a_{1n} + (1+\Pi)a_{2n} + \dots + (1+\Pi)a_{nn} + l_n w = p_n \end{cases}$$

o, matricialmente,

---

[3] “*A la vista de este doble carácter de los salarios, sería apropiado, cuando vengamos a considerar la división del excedente en capitalistas y trabajadores, separar las dos partes que componen el salario y considerar sólo la parte del «excedente» como variable, en tanto que los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores continuarían apareciendo entre los medios de producción, con el petróleo, etc.*” (Sraffa, 8). “*También supondremos en lo sucesivo que el salario se paga «post factum» como una participación del producto anual, abandonándose así la idea de los economistas clásicos de un salario «avanzado» desde el capital. Retenemos, sin embargo, el supuesto de un ciclo anual de producción con un mercado anual*” (Sraffa, 9).

(*)$_4$ $$p\left[I-(1+\Pi)A\right]=lw$$

sistema de *n* ecuaciones y *n*+2 incógnitas:

$$\Pi,\ w,\ p_1,\ldots,\ p_n$$

lo cual significa que deberán fijarse dos de ellas para que el sistema se haga determinado.

3. LIMITACIONES DEL TIPO DE BENEFICIO

El sistema (*)$_4$ puede escribirse como

$$p\,(1+\Pi)\left[\frac{1}{1+\Pi}I-A\right]=lw$$

o, si se prefiere, como

(*)$_5$ $$p\left(\frac{1}{1+\Pi}I-A\right)=\frac{l}{1+\Pi}w$$

La matriz A es por construcción positiva ($a_{ij}\geq 0,\ 1\leq i\leq n,\ \ 1\leq j\leq n$) y admite un autovalor máximo $\bar{a}$ positivo. Sabemos que $\forall\ \lambda\in$ R, $\lambda>\bar{a}$, tenemos que $(\lambda\ I-A)$ es inversible y que su inversa es positiva. Entonces, para que (*)$_4$ o (*)$_5$ tengan solución con significado económico debe ser $\frac{1}{1+\Pi}>\bar{a}$ o bien $\Pi<\frac{1}{\bar{a}}-1$.

Examinemos las características de las posibles soluciones de (*)$_4$. Para hacerlo determinado es preciso fijar dos incógnitas. Si empezamos fijando Π, $0\leq\Pi<\frac{1}{\bar{a}}-1$, entonces el sistema se convierte en lineal con n ecuaciones y $n+1$ incógnitas: los n precios y el salario unitario, por lo que, haciendo una cualquiera de estas igual a la unidad, el sistema queda perfectamente determinado.

Si no fijamos Π y la mantenemos como incógnita, el sistema no es lineal y no podemos fijar arbitrariamente dos cualesquiera de las demás incógnitas. Supongamos, por ejemplo, que fijamos w = 1 e intentamos fijar p_1, debemos tener:

$$\left(1-(1+\Pi)a_{11}\right)p_1-(1+\Pi)a_{21}p_2-\ldots-(1+\Pi)a_{n1}p_n=l_1$$

de donde

$$\left(1-(1+\Pi)a_{11}\right)p_1\geq l_1 \quad \text{o bien} \quad p_1\geq\frac{l_1}{1-(1+\Pi)a_{11}}\ldots\ldots\ldots$$

4. REPARTO DEL EXCEDENTE ENTRE LA "SOCIEDAD" DE LOS CAPITALISTAS Y LA "SOCIEDAD" DE LOS TRABAJADORES

Denotando

$$L=\sum_{i=1}^{n}l_i\,, \qquad q_i=q_{i1}+\ldots+q_{in} \qquad Q_i=q_i+\beta_i$$

y sumando por columnas los dos miembros de las ecuaciones $(*)_2$, tenemos:

$$q_1p_1+\ldots+q_np_n+\Pi\,(q_1p_1+\ldots+q_np_n)+Lw=(q_1+\beta_1)\,p_1+\ldots+(q_n+\beta_n)\,p_n$$

de donde resulta

$(*)_6$ $$\Pi\,(q_1p_1+\ldots+q_np_n)+Lw=\beta_1p_1+\ldots+\beta_np_n$$

En el caso extremo en que $\Pi = 0$, resulta $Lw = \beta_1 p_1 +\ldots+ \beta_n p_n$ y para $w = 1$ tenemos que el valor del excedente coincide precisamente con la cantidad total L de trabajo empleado; como consecuencia, todo el excedente va a parar a los trabajadores. Es ese caso, la ecuación $(*)_4$: $p\,(I-A) = lw$ tiene como solución (haciendo $w = 1$), que denotaremos

$(*)_7$ $v = l\,(I-A)^{-1}$ que es a lo que Marx denominaba "valores".

5. HOMOGENEIZACIÓN DE LAS UNIDADES

Consideremos el problema descrito en el tablero $(*)_1$; la fila i, $1 \le i \le n$, es representativa de la mercancía i; así, q_{ij} es la cantidad física de unidades de mercancía i utilizadas por la industria j en el período considerado –por ejemplo, quilos de trigo, y nada impide medir estas unidades en toneladas en vez de en quilos–; lo mismo se puede decir para el resto de las mercancías.

Sea

$$r = (r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_{\mathrm{n}}) \in \mathrm{R}^n, \quad r > 0 \text{ (e.d.: } r_i > 0 \ \ \forall i)$$

y transformemos el tablero $(*)_1$ en:

$$(*)_9 \qquad \left[\begin{array}{ccccc} & (q'_{ij}) & & \beta' & Q' \\ \left(\begin{array}{ccccc} r_1 q_{11} & \ldots & r_1 q_{1i} & \ldots & r_1 q_{1n} \\ r_2 q_{21} & \ldots & r_2 q_{2i} & \ldots & r_2 q_{2n} \\ \vdots & & & & \\ r_n q_{n1} & \ldots & r_n q_{ni} & \ldots & r_n q_{nn} \end{array} \right) & & & \begin{array}{c} \overline{r_1 \beta_1} \\ r_2 \beta_2 \\ \\ r_n \beta_n \end{array} & \begin{array}{c} \overline{r_1 Q_1} \\ r_2 Q_2 \\ \\ r_n Q_n \end{array} \\ L_1 \qquad\qquad L_i \qquad\qquad L_n & & & & \end{array} \right]$$

Entonces, siendo w el salario unitario y Π el tipo de beneficio, tenemos el sistema

$$\begin{cases} (1+\Pi)(r_1\, q_{11}\, p_1 + r_2\, q_{21}\, p_2 + \ldots + r_n\, q_{n1}\, p_n + L_1 w = r_1\, Q_1\, p_1 \\ \ldots \\ (1+\Pi)(r_1\, q_{1i}\, p_1 + r_2\, q_{2i}\, p_2 + \ldots + r_n\, q_{ni}\, p_n + L_i w = r_i\, Q_i\, p_i \\ \ldots \\ (1+\Pi)(r_1\, q_{1n}\, p_1 + r_2\, q_{2n}\, p_2 + \ldots + r_n\, q_{nn}\, p_n + L_n w = r_n\, Q_n\, p_n \end{cases}$$

y dividiendo los dos miembros de cada ecuación i por $r_i Q_i$:

$$\left\{ (1+\Pi)\left(\frac{r_1}{r_i} a_{1i}\, p_1 + \ldots + \frac{r_i}{r_i} a_{ii}\, p_i + \ldots + \frac{r_n}{r_i} a_{ni}\, p_n + \frac{L_i w}{r_i Q_i} \right) = p_i \qquad 1 \le i \le n \right.$$

y poniendo

$$a'_{ij} = \frac{r_i}{r_j} a_{ij}, \qquad A' = (a'_{ij}), \qquad l'_i = \frac{L_i}{r_i\, Q_i}, \qquad l' = (l'_1, \ldots, l'_i, \ldots, l'_n)$$

$$\{(1+\Pi)\left(a'_{1i}\ p_1+\ldots+a'_{ii}\ p_i+\ldots+a'_{ni}\ p_n\right)+l'_i=p_i \qquad 1\le i\le n$$

o aún

$$\{-a'_{1i}p_1-\ldots+\left(1-a'_{ii}\right)p_i-\ldots-a'_{ni}p_n=l'_i \qquad 1\le i\le n$$

lo que se traduce matricialmente por:

(*)10 $\qquad p\left[I-(1+\Pi)A'\right]=l'$

Cabe resaltar que el planteamiento anterior es estructuralmente idéntico al original, pues lo único que hemos hecho fue modificar las unidades de medida de las mercancías; como consecuencia, queda modificada la cantidad de trabajo por unidad (el vector l) y, por tanto, también el precio de cada unidad (el vector p), pero sin alterar para nada la estructura del problema planteado.

Como vimos anteriormente, la matriz tecnológica $A = (a_{ij})$ se transforma en $A'=\left(a'_{ij}\right)$ con $a'_{ij}=\frac{r_i}{r_j}a_{ij}$ y este es, precisamente, nuestro objetivo: buscar $r\in \mathrm{R}^n$ (r>0), lo que nos permitirá un cambio de unidades, de modo que la nueva matriz tecnológica tenga propiedades matemáticas que faciliten el desarrollo analítico de los distintos problemas que se presentan en el análisis.

El primer resultado sencillo es:

Proposición: Los autovalores de A' son los mismos que los de A y en particular el autovalor máximo.

En efecto, denotemos $\hat{r}$ la matriz diagonal

$$\hat{r}=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{pmatrix}$$

entonces, mediante un cálculo sencillo,

$$A' = \hat{r}\, A\, \hat{r}^{-1}$$

y

$$\lambda\, I - A' = \hat{r}\, \lambda\, I\, \hat{r}^{-1} - \hat{r}\, A\, \hat{r}^{-1} = \hat{r}\, (\lambda\, I - A)\, \hat{r}^{-1}$$

y

$$\det(\lambda\, I - A') = \det \hat{r} \cdot \det(\lambda\, I - A) \cdot \det \hat{r}^{-1} = \det(\lambda\, I - A)$$

de donde

$$\det(\lambda\, I - A') = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda\, I - A) = 0$$

y los autovalores coinciden.

5.1. UN CASO PARTICULAR IMPORTANTE

Si el sistema económico presenta algún tipo de excedente, entonces sabemos que el autovalor máximo $\bar{a}$ de la matriz tecnológica A es estrictamente menor que 1 $(\bar{a} < 1)$ al cual, *si A es irreducible* corresponde un *autovector por la izquierda* $r > 0$, y tenemos $rA = \bar{a}\, r$.

Entonces, tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq n$:

$$r_1\, a_{1i} + ... + r_i\, a_{ii} + ... + r_n\, a_{ni} = \bar{a}\, r_i$$

es decir,

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \frac{r_1}{r_i} a_{1i} + ... + \frac{r_i}{r_i} a_{ii} + ... + \frac{r_n}{r_i} a_{ni} = \bar{a}$$

o aún,

(*)11 $$a'_{1i} + ... + a'_{ii} + ... + a'_{ni} = \bar{a}, \quad 1 \leq i \leq n$$

de donde la nueva matriz tecnológica A' tiene la propiedad de que

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \bar{a}$$

lo que supone que los vectores columna de A' suman todos lo mismo, a saber $\bar{a}$

autovalor máximo de A' (y de A).

Por otra parte, dado que

$$\forall i, \quad 1 \leq i \leq n \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \overline{a}$$

Dado que *Mn* (R) conjunto de las matrices cuadradas de orden n es un espacio vectorial sobre R, se demuestra fácilmente que las aplicaciones

$$Mn\,(\mathrm{R}) \rightarrow \mathrm{R}_{+} = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x \geq 0\}$$

$$\text{a) } A = (a_{ij}) \rightarrow \|A\| = \sup_{j} \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij} |$$

$$\text{b) } A = (a_{ij}) \rightarrow \|A\|^{*} = \sup_{i} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} |$$

son normas en Mn (R), tenemos también $\sup_{i} \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \|A'\| = \overline{a}$ por lo que la norma de A' es igual a $\overline{a}$ y el vector $\overline{1} = (1,\ldots,1)$ es autovector por la izquierda de A'. Ello significa económicamente que, haciendo abstracción de la componente trabajo en el sistema, las mercancías se intercambiarían una a una.

Por otra parte, de $(*)_{11}$ deducimos:

$$1 - a'_{ii} - \sum_{j \neq i} a'_{ji} = 1 - \overline{a} > 0$$

o bien

$$1 - a'_{ii} = (1 - \overline{a}) + \sum_{j \neq i} a'_{ji}$$

y como $1 - \overline{a} > 0$,

$$1 - a'_{ii} > \sum_{j \neq i} a'_{ji}$$

y la matriz $I - A'$ es de Leontief diagonal dominante por columnas.[4]

Consideremos ahora una tasa de beneficio Π, $\left(0 \le \Pi < \frac{1}{\overline{a}} - 1\right)$, como r es autovector izquierdo de A,

$$r\,A = \overline{a}\,r$$

y

$$r\,(1+\Pi)\,A = (1+\Pi)\,\overline{a}\,r$$

por lo que $(1+\Pi)\,\overline{a}$ es autovalor de (1 + Π) A, que admite r como autovector izquierdo.

Multiplicando por 1+Π los dos miembros de $(*)_{11}$, resulta $\forall i, \quad 1 \le i \le n$:

$$(1+\Pi)\,a'_{1i} + (1+\Pi)\,a'_{2i} + \ldots + (1+\Pi)\,a'_{ni} = (1+\Pi)\,\overline{a}$$

$$1 - (1+\Pi)\,a'_{ii} - \sum_{j \ne i} (1+\Pi)\,a'_{ji} = 1 - (1+\Pi)\,\overline{a}$$

o aún:

$$1 - (1+\Pi)\,a'_{ii} = \left(1 - (1+\Pi)\,\overline{a}\right) + \sum_{j \ne i} (1+\Pi)\,a'_{ji}, \quad 1 \le i \le n$$

y siendo

$$1 - (1+\Pi)\,\overline{a} > 0 \quad \left(\text{porque } \Pi < \frac{1}{\overline{a}} - 1\right)$$

resulta que la matriz $I - (1+\Pi)\,A'$ es también Leontief diagonal dominante por columnas.

Lo anterior podemos resumirlo en la siguiente proposición.

$(*)_{12}$ *Proposición*: Todo sistema tipo Leontief (o Leontief-Sraffa) con técnica $\begin{bmatrix} A \\ l \end{bmatrix}$

[4] Decimos que (α_{ij}) matriz cuadrada de orden n es Leontief diagonal dominante por columnas si:
1) $\alpha_{ii} > 0$ y $\alpha_{ij} \le 0$ si $i \ne j$ (Leontief)
2) $\forall i, \quad 1 \le i \le n \quad \alpha_{ii} > \sum_{j \ne i} \left|\alpha_{ji}\right|$ (Diagonal dominante por columnas)

puede ser transformado en uno estructuralmente equivalente $\begin{bmatrix} A' \\ l' \end{bmatrix}$, que tiene las siguientes propiedades:

a) Los autovalores de A' son los mismos que los de A (y, por lo tanto, el autovalor máximo $\bar{a}$).

b) $\forall i, \quad 1 \le i \le n \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \bar{a}$ (las columnas de A' suman todas $\bar{a}$) y, por lo tanto, la norma de A', $\|A'\| = \sup_i \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \bar{a}$.

c) $\forall \Pi, \quad 0 \le \Pi \le \dfrac{1}{\bar{a}} - 1$, las columnas de $(1+\Pi)A'$ suman todas $(1+\Pi)\bar{a}$; $\|(1+\Pi)A'\| = (1+\Pi)\bar{a}$ y la matriz $I-(1+\Pi)A'$ es Leontief diagonal dominante por columnas.

En lo que sigue, y salvo mención expresa que diga lo contrario, denotaremos A en lugar de A', l en lugar de l', etc., es decir, suponemos que la técnica del sistema ha sido previamente homogeneizada, de modo que en particular la matriz tecnológica A es tal que $\forall i, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ji} = \bar{a}$.

Con el objetivo de ilustrar lo expuesto anteriormente, consideremos el siguiente ejemplo numérico.

$$\begin{bmatrix} (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 20 \\ 30 & 40 & 10 \\ 40 & 100 & 20 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} \\ (L_i) = (60, \ 40, \ 20), \qquad \sum L_i = 120 \end{bmatrix}$$

La matriz tecnológica es

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

y el vector de los coeficientes de trabajo es:

$$l = (1{,}2\ ,\ 0{,}4\ ,\ 0{,}1)$$

Se comprueba fácilmente que el autovalor máximo de la matriz A, raíz de la ecuación característica det $(\lambda\, I - A) = 0$, es $\bar{a} = 0{,}8$.

Calculamos el autovector por la izquierda asociado a $\bar{a} = 0{,}8$ resolviendo

$$(r_1, r_2, r_3)\ (\bar{a}\ I - A) = (0, 0, 0)$$

que tomando, por ejemplo, $r_3 = 1$, resulta: $r_1 = 4{,}8421, \quad r_2 = 4{,}315789, \quad r_3 = 1$

La nueva matriz de transacciones (q'_{ij}) se obtiene poniendo

$$q'_{ij} = r_i\ q_{ij}$$

es decir, multiplicando cada fila i de (q_{ij}) por el correspondiente r_i; asimismo,

$$\beta'_i = r_i\ \beta_i\ ,\ Q'_i = r_i\ Q_i$$

La cantidad total de trabajo utilizado por cada industria sigue siendo la misma.

La nueva tecnología se obtiene haciendo $a'_{ij} = \dfrac{r_i}{r_j}\, a_{ij}$ y $l'_i = \dfrac{l_i}{r_i}$.

Resulta

$$A' = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}168292 & 0{,}48421 \\ 0{,}534783 & 0{,}4 & 0{,}215789 \\ 0{,}165217 & 0{,}231707 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$l' = (0{,}247826,\ 0{,}092682,\ 0{,}1)$$

y se observa fácilmente que $\forall j,\ 1 \le j \le 3$,

$$\sum_{i=1}^{3} a'_{ij} \approx \bar{a} = 0{,}8$$

5.2. ALGUNAS PROPIEDADES RELEVANTES DE ESTE TIPO DE MATRICES

1) Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrices cuadradas de orden n, tales que $\forall j$, $1 \le j \le n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = b$$

poniendo $A \cdot B = (\gamma_{ij})$ con $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$, tenemos $\forall j$, $1 \le j \le n$,

$$\sum_i \gamma_{ij} = \sum_i \left(\sum_k a_{ik}\ b_{kj} \right) = \sum_k b_{kj} \left(\sum_i a_{ik} \right) = a \left(\sum_k b_{kj} \right) = ab$$

y para este tipo de matrices se verifica

$$\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$$

de lo que se deduce en particular

(*)13 $\quad \|A^n\| = \|A\|^n = a^n$

2) La suma de los elementos de cada columna de la matriz homogeneizada A es $\bar{a} < 1$ o, lo que es lo mismo, $\|A\| = \bar{a} < 1$.

Entonces, un resultado clásico nos indica

$$(I - A)^{-1} = I + A + ... + A^n + ...$$

y entonces $\forall j$, $1 \le j \le n$ la suma de los elementos de la columna j de $(I - A)^{-1}$ será:

$$1 + \bar{a} + ... + \bar{a}^n + ... = \frac{1}{1 - \bar{a}}$$

de lo que se deduce también

(*)14 $\left\| (I - A)^{-1} \right\| = \dfrac{1}{1-\bar{a}}$

Por un razonamiento análogo, dada una tasa de beneficio Π, $0 \leq \Pi < \dfrac{1}{\bar{a}} - 1$, la suma de los elementos de cada columna j de $(I - (1+\Pi)A)^{-1}$ es

$$\frac{1}{1-(1+\Pi)\bar{a}}$$

por lo que

$$\left\| (I - (1+\Pi)A)^{-1} \right\| = \frac{1}{1-(1+\Pi)\bar{a}}$$

5.3. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA INVERSA $(I - (1 + \Pi) A)^{-1}$ HOMOGENEIZADA

Denotemos $(\alpha_{ij}) = (I - A)^{-1}$. Si suponemos que la matriz tecnológica A, así como el vector l de coeficientes de trabajo, permanecen constantes ante un incremento infinitesimal $\Delta\beta_j$ de β_j de $X = (I - A)^{-1}\beta$, tenemos:

$$X_i(\beta_1,..., \beta_j,..., \beta_n) = \alpha_{i1}\beta_1 +...+ \alpha_{ij}\beta_j +...+ \alpha_{in}\beta_n$$
$$X_i(\beta_1,..., \beta_j + \Delta\beta_j,..., \beta_n) = \alpha_{i1}\beta_1 +...+ \alpha_{ij}(\beta_j + \Delta\beta_j) +....+ \alpha_{in}\beta_n$$

de donde:

$$X_i(\beta_1,..., \beta_j + \Delta\beta_j,..., \beta_n) - X_i(\beta_1,..., \beta_j,..., \beta_n) = \alpha_{ij}\,\Delta\beta_n$$

y si suponemos que A permanece invariable cuando $\Delta\beta_j = 1$, α_{ij} representa la cantidad física de mercancía i necesaria para obtener una unidad física de mercancía final j. Entonces, cada columna j de $(I - A)^{-1}$ representa las cantidades físicas heterogéneas de mercancías necesarias directa e indirectamente en todo el sistema económico para obtener una unidad física de mercancía final j.

Por otra parte, $l\,(I - A)^{-1}$ es un vector cuya componente

$$j: \quad v_j = \alpha_{ij}\, l_1 + ... + \alpha_{nj}\, l_n$$

es representativa de la cantidad de trabajo utilizado directa e indirectamente para obtener una unidad j de mercancía final. Diremos que los v_j son los *coeficientes de trabajo verticalmente integrados*.

Como la matriz tecnológica fue homogeneizada, $(\alpha_{ij}) = (I - A)^{-1}$ tiene la propiedad $\forall j, \quad 1 \leq j \leq n,$

$$\alpha_{1j} + ... + \alpha_{ij} + ... + \alpha_{nj} = \frac{1}{1-\bar{a}}$$

y, como consecuencia, si se diera la circunstancia de que

$$l_1 = l_2 = ... = l_i = ... = l_n = t$$

tendríamos que $\forall j, \quad 1 \leq j \leq n,$

$$v_j = t\,\alpha_{1j} + ... + t\,\alpha_{ij} + ... + t\,\alpha_{nj} = \frac{t}{1-\bar{a}}$$

con lo que concluimos que *en un sistema homogeneizado, si los coeficientes de trabajo directo l_i son iguales, entonces los "valores" v_i también son iguales.*

Igualmente, y por un razonamiento análogo, si consideramos una tasa de beneficio Π, $0 \leq \Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1$, de $p = lw\,\left(I - (1+\Pi)A\right)^{-1}$, si todos los l_i son iguales a t, tomando w = 1, tendremos:

$$p_i(\Pi) = \frac{t}{1-(1+\Pi)\bar{a}}, \quad 1 \leq i \leq n$$

es decir, los precios son todos iguales y crecen al aumentar Π, según

$$p_i'(\Pi)=\frac{\overline{a}t}{\left(1-(1+\Pi)\overline{a}\right)^2}\,.$$

5.4. PROPIEDADES DE LA INVERSA (*I* –(1 + *Π*) A)$^{-1}$ NORMALIZADA

Pongamos ahora,

$$p\left(\frac{1}{1+\Pi}I-A\right)=\frac{l}{1+\Pi}w$$

$$\alpha(\Pi)=\left(\alpha_{ij}(\Pi)\right)=\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1},$$

y

$$p(\Pi)=lw\alpha(\Pi)=lw\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1}$$

denotemos:

$$\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right)=\frac{\alpha_{ij}(\Pi)}{\left\|\alpha_{ij}(\Pi)\right\|}$$

Como $\left\|\alpha_{ij}(\Pi)\right\|=\dfrac{1}{1-(1+\Pi)\overline{a}}$ (A es homogenizada) tenemos que la matriz $\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right)$ es tal que $\left\|\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right\|=1$ o lo que es lo mismo, $\forall j$, $(1\le j\le n)$ $\sum_i\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)=1$ (la suma de los elementos de cada columna de $\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right)$ es uno), por lo que existe

$$\lim_{\Pi\longrightarrow\tilde{\Pi}}\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)=\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})\right)$$

Si denotamos

$$\tilde{p}(\Pi)=lw\frac{\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1}}{\dfrac{1}{1-(1+\Pi)\overline{a}}}$$

Tenemos:

(*)15: $\quad\tilde{p}(\Pi)=lw\left(1-(1+\Pi)\overline{a}\right)\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1}$

o multiplicando los dos miembros por $I-(1+\Pi)A$:

(*)16: $\tilde{p}(\Pi)(I-(1+\Pi)A)=lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$

y tomando limites en los miembros cuando $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}=\frac{1}{\bar{a}}-1$ queda $\tilde{p}(\tilde{\Pi})\left(I-\frac{1}{\bar{a}}A\right)=0$

o lo que es lo mismo $\tilde{p}(\tilde{\Pi})\,(\bar{a}I-A)=0$; ahora bien, siendo $\forall j$, $\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})=1$ tenemos:

$$\tilde{p}_i(\tilde{\Pi})=l_1\tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})+\ldots+l_n\tilde{\alpha}_{nj}(\tilde{\Pi})$$

$$\tilde{p}_j(\tilde{\Pi})\le\left(\inf_i l_i\right)\left(\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})\right)=\inf_i l_i>0$$

y también $\tilde{p}_j(\tilde{\Pi})\le\left(\sup_i l_i\right)\left(\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})\right)=\sup_i l_i<+\infty$

por lo que podemos concluir que $\tilde{p}(\tilde{\Pi})$ es autovector izquierdo de A asociado al autovalor máximo $\bar{a}$ y siendo A homogenizada, $\tilde{p}(\tilde{\Pi})$es de la forma $(\alpha,\alpha,\ldots,\alpha)$ con $\alpha>0$; es decir, cuando Π tiende a $\tilde{\Pi}$ los precios relativos tienden a ser todos iguales. Es un resultado que no bebería sorprendernos demasiado puesto que cuando Π tiende al tipo máximo de beneficio, la proporción de producto neto que va al trabajo tiende a cero y nos encontramos en una situación igual a cuando los coeficientes de trabajo directo l_i fueran iguales a cero.

De lo anterior se deducen una serie de propiedades interesantes de la matriz $\tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})$:

a) De (*)6 tenemos:

$$\Pi(q_1p_1+\ldots\ldots+q_np_n)+Lw=\beta_1p_1+\ldots\ldots+\beta_np_n$$

Cuando Π tiende a $\tilde{\Pi}$, $\tilde{p}_i(\Pi)$tiende a $\tilde{p}_i(\tilde{\Pi})$, Lw tiende a cero, por lo que, siendo los $\tilde{p}_i(\tilde{\Pi})$ todos iguales, y poniendo $\tilde{p}_i(\tilde{\Pi})=\tilde{p}$, tenemos:

$$\tilde{\Pi}\,\tilde{p}\left(\sum_i q_i\right)=\tilde{\Pi}\,\tilde{p}\left(\sum_{i,j} q_{ij}\right)=\tilde{p}\left(\sum_i \beta_i\right)$$

o lo que es lo mismo

(*)17 $$\tilde{\Pi}=\frac{\sum_i \beta_i}{\sum_{i,j} q_{ij}}$$

por lo que concluimos que en un sistema homogeneizado la razón entre excedente global y la suma de los medios de producción utilizados coinciden con el tipo máximo de beneficio. Es lo que Sraffa denomina *razón patrón (global)* para los sistemas patrón.[5]

b) Retomando la (*)15,

$$\tilde{p}(\Pi)=lw\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right)=\left[\left(1-(1+\Pi)\overline{a}\right)\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1}\right]$$

y dado que existe

$$\lim_{\Pi\longrightarrow\tilde{\Pi}} \tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)=\left(\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$$

y también

$$\lim_{\Pi\longrightarrow\tilde{\Pi}} \tilde{p}(\Pi)=\tilde{p}\left(\tilde{\Pi}\right)=(\alpha,\ldots,\alpha),\alpha>0$$

debemos tener:

$$\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right)=\alpha=l_1 w\tilde{\alpha}_{1i}\left(\tilde{\Pi}\right)+\ldots\ldots+l_n w\tilde{\alpha}_{ni}\left(\tilde{\Pi}\right)$$
$$\tilde{p}_j\left(\tilde{\Pi}\right)=\alpha=l_1 w\tilde{\alpha}_{1j}\left(\tilde{\Pi}\right)+\ldots\ldots+l_n w\tilde{\alpha}_{nj}\left(\tilde{\Pi}\right)$$

de donde se deduce

$$\tilde{\alpha}_{1i}\left(\tilde{\Pi}\right)=\tilde{\alpha}_{1j}\left(\tilde{\Pi}\right),\ldots\ldots,\tilde{\alpha}_{ni}\left(\tilde{\Pi}\right)=\tilde{\alpha}_{nj}\left(\tilde{\Pi}\right)$$

[5] Ver Sraffa (1975): Capitulo 4: "La mercancía patrón" del libro "Producción de mercancías por medio de mercancías".

es decir, en cada fila k de la $\left(\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$ los elementos $\left(\tilde{\alpha}_{kj}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$, $1 \leq j \leq n$ son iguales; o lo que es lo mismo, los vectores columna de $\left(\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right)$ son todos iguales.

5.5. CONDICIÓN NECESARIA DE IGUALDAD DE PRECIOS PARA DISTINTOS TIPOS DE BENEFICIOS

Estudiamos ahora que condiciones deben darse en un sistema homogenizado para que a distintos tipos de beneficio Π y Π' correspondan precios relativos iguales $\tilde{p}(\Pi) = \tilde{p}(\Pi') = \tilde{p}$.

En primer lugar, los precios relativos del tipo $p_i(\Pi)$ son idénticos a los de tipo $\tilde{p}_i(\Pi)$, en efecto si $0 \leq \Pi \leq \tilde{\Pi}$, tenemos:

$$\frac{\tilde{p}_i(\Pi)}{\sum_i \tilde{p}_i(\Pi)} = \frac{p_i(\Pi)(1-(1+\Pi)\bar{a})}{\left(\sum_i p_i(\Pi)\right)(1-(1+\Pi)\bar{a})} = \frac{p_i(\Pi)}{\sum_i p_i(\Pi)}$$

y cuando $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}$, los limites del numerador y del denominador existen y son distintos de cero. Tenemos:

$$\frac{\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right)}{\sum_i \tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right)} = \lim_{\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}} \frac{p_i(\Pi)}{\sum_i p_i(\Pi)}$$

por lo que tenemos que los precios relativos $p_i(\Pi)$ son los mismos que los $\tilde{p}_i(\Pi)$ incluso cuando $\Pi = \tilde{\Pi}$.

Si $\tilde{p}(\Pi) = \tilde{p}(\Pi') = \tilde{p}$, de $(*)_{16}$ tenemos:

$$\tilde{p}\ \left(I - (1+\Pi)A\right) = lw\left(1 - (1+\Pi)\bar{a}\right)$$
$$\tilde{p}\ \left(I - (1+\Pi')A\right) = lw\left(1 - (1+\Pi')\bar{a}\right)$$

de donde y mediante cálculos elementales se obtiene:

$\frac{\Pi-\Pi'}{(1-(1+\Pi)\bar{a})(1-(1+\Pi')\bar{a})}\tilde{p}(\bar{a}I-A)=0$ o aun $\tilde{p}(\bar{a}I-A)=0$ y $\tilde{p}$ es autovector izquierdo de A.

Asimismo, de

$\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)A)=lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$ y siendo $\tilde{p}$ autovector izquierdo, tenemos $\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)\bar{a})=lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$ por lo que $\tilde{p}=lw$ y siendo A homogeneizada los componentes de $\tilde{p}$ son todos iguales por lo que las de l también son iguales.

Ya hemos visto anteriormente[6] que si las componentes l_i del vector l eran iguales, los precios eran iguales para cualquier Π. Podemos pues enunciar:

(*)$_{18}$ *Teorema:* En un sistema homogeneizado, es condición necesaria y suficiente para que los precios relativos permanezcan invariantes al modificar Π $\left(0\le\Pi\le\tilde{\Pi}\right)$ que los coeficientes de trabajo directo l_i sean iguales.

Supongamos ahora que los coeficientes de trabajo directo son todos iguales a t ; los precios son entonces todos iguales y dependen solo de Π y de w:

$$p_i(\Pi)=\frac{tw}{1-(1+\Pi)\bar{a}}\ ,\ 0\le\Pi\le\tilde{\Pi}\,,$$

de (*)$_6$ tenemos:

(*)$_{19}$ $$\Pi\,p_i(\Pi)\left(\sum_{i,j}q_{ij}\right)+Lw=p_i(\Pi)\left(\sum_i\beta_i\right)$$

dado Π, el valor del producto neto del sistema es $p_i(\Pi)\left(\sum_i\beta_i\right)$. Y el beneficio total de todas las industrias es $\Pi\,p_i(\Pi)\left(\sum_{i,j}q_{ij}\right)$.

[6] Ver página 18 y 19.

Denotamos W la parte del producto neto que va al trabajo. Sabemos que si $\Pi = 0$ $p_i(0)\left(\sum_i \beta_i\right) = L$ y entonces $W = 1$; por el contrario si $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}$, $W = 0$ por lo que W varia entre cero y uno.

Dividiendo los dos miembros de (*)19 por $p_i(\Pi)\left(\sum_i \beta_i\right)$ y teniendo en cuenta (*)17 se obtiene $\frac{\Pi}{\tilde{\Pi}} + W = 1$ o aun $\Pi = \tilde{\Pi}(1 - W)$ lo que nos proporciona una relación lineal entre el tipo de beneficio Π y la proporción W del producto neto que va a los trabajadores.

5.6. EL SISTEMA HOMOGENEIZADO Y EL SISTEMA PATRON DE SRAFFA

Retomamos (*)6

$$\Pi(q_1 p_1(\Pi) + \ldots\ldots + q_n p_n(\Pi)) + Lw = \beta_1 p_1(\Pi) + \ldots\ldots + \beta_n p_n(\Pi)$$

y denotamos $W(\Pi)$ la parte del excedente que va a los trabajadores dado un tipo de beneficio Π. Tenemos:

$$(*)_{20} \qquad \Pi \frac{\sum_i q_i p_i(\Pi)}{\sum_i \beta_i p_i(\Pi)} + \frac{Lw}{\sum_i \beta_i p_i(\Pi)} = 1$$

Como $W = \frac{Lw}{\sum_i \beta_i p_i(\Pi)}$, si pretendemos que W dependa linealmente de Π, debe ser $\sum_i q_i p_i(\Pi)$ proporcional a $\sum_i \beta_i p_i$ ahora bien

$$
\begin{aligned}
&\sum_i q_i p_i(\Pi)= \\
&q_1 p_1(\Pi)=q_1\left(l_1\alpha_{11}(\Pi)+l_2\alpha_{21}(\Pi)+\ldots\ldots+l_n\alpha_{n1}(\Pi)\right) \\
&+\ldots \\
&\vdots \\
&+q_n p_n(\Pi)=q_n\left(l_1\alpha_{1n}(\Pi)+l_2\alpha_{2n}(\Pi)+\ldots\ldots+l_n\alpha_{nn}(\Pi)\right) \\
&=l_1\left(q_1\alpha_{11}(\Pi)+q_2\alpha_{12}(\Pi)+\ldots\ldots+q_n\alpha_{1n}(\Pi)\right) \\
&+\ldots \\
&\vdots \\
&+l_n\left(q_1\alpha_{n1}(\Pi)+q_2\alpha_{n2}(\Pi)+\ldots\ldots+q_n\alpha_{nn}(\Pi)\right) \\
&=l\cdot\left(\alpha_{ij}\right)\cdot {}^t q
\end{aligned}
$$

donde ${}^t q$ representa el vector columna cuyas componentes son los q_i, igualmente y por un razonamiento análogo $\sum_i \beta_i p_i = l\cdot\left(\alpha_{ij}\right)\cdot {}^t\beta$.

Si se dan las condiciones del sistema patrón de Sraffa, entonces $\forall_i$, $\frac{q_i}{\beta_i}=\frac{1}{\tilde{\Pi}}$. Por lo que $\forall_i$, $\frac{q_i p_i(\Pi)}{\beta_i p_i(\Pi)}=\frac{1}{\tilde{\Pi}}$ y de $(*)_{20}$ resulta: $\frac{\Pi}{\tilde{\Pi}}+W=1$ o bien $\Pi=\tilde{\Pi}(1-W)$. Relación lineal entre W y Π cuando el salario se expresa como proporción del producto neto patrón.

Para el sistema patrón homogeneizado sabemos que si los l_i son iguales, entonces los $p_i(\Pi)$ también son iguales, que denotamos p y de $(*)_{20}$ directamente deducimos:

$$
\frac{\sum_i q_i p}{\sum_i \beta_i p}=\frac{p\left(\sum_i q_i\right)}{p\left(\sum_i \beta_i\right)}=\frac{\sum_i q_i}{\sum_i \beta_i}
$$

Como sabemos que (*)17, $\dfrac{\sum_i q_i}{\sum_i \beta_i} = \dfrac{1}{\tilde{\Pi}}$ tenemos $\dfrac{\Pi}{\tilde{\Pi}} + W = 1$, $\Pi = \tilde{\Pi}(1-W)$

relación que ya habíamos encontrado anteriormente.

Podemos concluir que la relación lineal

(*)21 $\Pi = \tilde{\Pi}(1-W)$

que se da para el sistema patrón de Sraffa, se da también para un sistema cualquiera previamente homogeneizado en el que los coeficientes de trabajo directo l_i sean todos iguales.

En un sistema patrón de Sraffa se tiene que $\forall i$, $Q_i = \dfrac{1}{\bar{a}} q_i$ o aun $Q_i = \left(1+\tilde{\Pi}\right) q_i$

por lo que $\forall \Pi$, $0 \leq \Pi \leq \tilde{\Pi}$, $\beta_i(\Pi) = Q_i - \left(1+\tilde{\Pi}\right) q_i \geq 0$ y cuando $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}$, $\beta_i(\Pi) \longrightarrow 0$ por lo que $\sum_i \beta_i(\Pi) \longrightarrow 0$.

Consideremos un sistema homogeneizado y por tanto estructuralmente equivalente al sistema original; si el sistema no coincide con un sistema patrón de Sraffa, entonces dado Π, necesariamente existen industrias i para las que:

$$\beta_i(\Pi) = Q_i - (1+\Pi) q_i < 0$$

Dado un tipo de beneficio Π, $0 \leq \Pi \leq \tilde{\Pi}$ pongamos

$$\beta_1(\Pi) = Q_1 - (1+\Pi) q_1, \ldots\ldots, \beta_n(\Pi) = Q_n - (1+\Pi) q_n$$

$$\frac{\sum_i \beta_i(\Pi)}{(1+\Pi)\left(\sum_i q_i\right)} = \frac{\sum_i Q_i - (1+\Pi)\left(\sum_i q_i\right)}{(1+\Pi)\left(\sum_i q_i\right)} = \frac{\sum_i Q_i}{(1+\Pi)\left(\sum_i q_i\right)} - 1$$

pero dado que, (*)17:

$$\frac{\sum_i Q_i}{\sum_i q_i} = 1 + \tilde{\Pi} = \frac{1}{\bar{a}} \qquad \text{tenemos:} \qquad \frac{\sum_i \beta_i(\Pi)}{(1+\Pi)\left(\sum_i q_i\right)} = \frac{1}{(1+\Pi)\bar{a}} - 1$$

(recordemos que dado Π, $(1+\Pi)\bar{a}$ es autovalor máximo de $(1+\Pi)A$) y el resultado relaciona la suma algebraica de los $\beta_i(\Pi)$ (independientemente de su signo) con la suma de los q_{ij}.

REFERENCIAS

DEBREU, G.; HERSTEIN, I.N. (1953): "Non Negative Square Matrices", *Econometrica*, 21, pp. 597-607.

GANTMACHER (1966): *Thèorie de matrices*, t. 2. Paris: Dunod.

LEONTIEF, V. (1951): *The Structure of American Economy 1919-1929*. New York: Oxford University Press.

MADDOX, J.J. (1980): "Infinite Matrices of Operators", *Lectures Notes in Mathematics*, 786. Springer Verlag.

MCKENZIE, L. (1959): "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory", en Arrow, Karlin y Suppes [ed.]: *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford University Press.

PASSINETTI, L. (1983): *Lecciones de teoría de la producción*. Fondo de Cultura Económica.

QUIÑOÁ, J.L. (1983): *Inversibilidad en álgebras de Banach de matrices infinitas y aplicación a los sistemas de ecuaciones de orden infinito*. (Tesis doctoral). Zaragoza.

QUIÑOA, J.L. (1992): "Sur un type de matrice infinie de diagonale dominante dans la thèorie économique", *European Meeting of the Econometric Society*. Bruselas.

SRAFFA, P. (1975): *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Oikos-tau.

Últims documents de treball publicats

NUM	TÍTOL	AUTOR	DATA
11.04	Homogeneización en un Sistema de tipo Leontief (o Leontief-Sraffa).	Xose Luis Quiñoa, Laia Pié Dols	Febrer 2011
11.03	Ciudades que contribuyen a la Sostenibilidad Global	Ivan Muñiz Olivera, Roser Masjuan, Pau Morera, Miguel-Angel Garcia Lopez	Febrer 2011
11.02	Medición del poder de mercado en la industria del cobre de Estados Unidos: Una aproximación desde la perspectiva de la Nueva Organización Industrial	Andrés E. Luengo	Febrer 2011
11.01	Monetary Policy Rules and Financial Stress: Does Financial Instability Matter for Monetary Policy?	Jaromír Baxa, Roman Horváth, Borek Vašícek	Gener 2011
10.10	Is Monetary Policy in New Members States Asymmetric?	Borek Vasicek	Desembre 2010
10.09	CO2 emissions and economic activity: heterogeneity across countries and non stationary series	Matías Piaggio, Emilio Padilla	Desembre 2010
10.08	Inequality across countries in energy intensities: an analysis of the role of energy transformation and final energy consumption	Juan Antonio Duro, Emilio Padilla	Desembre 2010
10.07	How Does Monetary Policy Change? Evidence on Inflation Targeting Countries	Jaromír Baxa, Roman Horváth, Borek Vasícek	Setembre 2010
10.06	The Wage-Productivity Gap Revisited: Is the Labour Share Neutral to Employment?	Marika Karanassou, Hector Sala	Juliol 2010
10.05	Oil price shocks and labor market fluctuations	Javier Ordoñez, Hector Sala, Jose I. Silva	Juliol 2010
10.04	Vulnerability to Poverty: A Microeconometric Approach and Application to the Republic of Haiti	Evans Jadotte	Juliol 2010
10.03	Nuevos y viejos criterios de rentabilidad que concuerdan con el criterio del Valor Actual Neto.	Joan Pasqual, Emilio Padilla	Maig 2010
10.02	Memory in Contracts: The Experience of the EBRD (1991-2003)	Lionel Artige, Rosella Nicolini	Març 2010
10.01	Language knowledge and earnings in Catalonia	Antonio Di Paolo, Josep Lluís Raymond-Bara	Febrer 2010
09.12	Inflation dynamics and the New Keynesian Phillips curve in EU-4	Borek Vasicek	Desembre 2009